

中等职业学校职教高考公共基础课配套学生用书

新课标



数学 同步学习辅导

拓展模块一·下册

中等职业学校
公共基础课
配套学生用书

数学 同步学习辅导

拓展模块一·下册

主编 ◎ 封雄辉 余清香

湖南大学出版社

数学 同步学习辅导

拓展模块一·下册

主编 ◎ 封雄辉 余清香



责任编辑：金红艳 廖 鹏

封面设计：旗语书装



定价：35.00元

湖南大学出版社

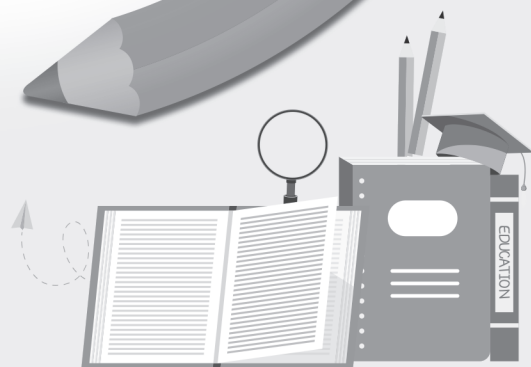
中等职业学校职教高考公共基础课配套学生用书

数学

同步学习辅导

拓展模块一·下册

主编 © 封雄辉 余清香



湖南大学出版社

· 长沙 ·

内 容 提 要

本书以中等职业学校教育教学改革、提高课堂时效性为目标,以《中等职业学校数学课程标准(2020年版)》为基础,充分落实学生的主体地位,从而激发学生的自信,挖掘学生的潜力。

本书是与中等职业学校公共基础课程教材《数学 拓展模块一 下册》相配套的学习指导用书,本书题目数量和难易程度适中,有助于学生巩固所学知识,进一步提高分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

数学同步学习辅导. 拓展模块一. 下册 / 封雄辉
余清香主编. -- 长沙: 湖南大学出版社, 2025. 10.
(中等职业学校职教高考公共基础课配套用书). -- ISBN
978-7-5667-4586-6
I. G634.603
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 202528W3F2 号

数学同步学习辅导 拓展模块一 下册

SHUXUE TONGBU XUEXI FUDAO TUOZHAN MOKUAI YI XIACE

主 编: 封雄辉 余清香
责任编辑: 金红艳 廖 鹏
印 装: 唐山唐文印刷有限公司
开 本: 889mm×1194mm 1/16 印 张: 8 字 数: 181 千字
版 次: 2025 年 10 月第 1 版 印 次: 2025 年 10 月第 1 次印刷
书 号: ISBN 978-7-5667-4586-6
定 价: 35.00 元

出 版 人: 李文邦
出版发行: 湖南大学出版社
社 址: 湖南·长沙·岳麓山 邮 编: 410082
电 话: 0731-88822559(营销部), 88821343(编辑室), 88821006(出版部)
传 真: 0731-88822264(总编室)
网 址: <http://press.hnu.edu.cn>
电子邮箱: presszhangip@hnu.com

版权所有, 盗版必究
图书凡有印装差错, 请与营销部联系

前言

为帮助广大中等职业学校的师生更深入地理解《中等职业学校数学课程标准(2020年版)》的理念和要求,全面贯彻党的教育方针,践行社会主义核心价值观,落实立德树人的根本任务,发展学生的数学学科核心素养,注重遵循中等职业学校学生的特点和实际数学基础水平,体现针对性和适度性。

本书是与中等职业学校公共基础课程教材《数学 拓展模块一 下册》相配套的学习辅导书用书。本书按照教材的章、节、目顺序进行编写,以节为单位,每节主要分为“学习目标”“同步练习”和“能力提升”三个栏目。学习目标,让学生从宏观上把握知识框架与能力定位;同步训练,通过经典例题巩固重要知识点;能力提升,旨在提升学生的计算能力,帮助学生突破重难点。

本书由长期工作在一线的中等职业学校骨干教师编写,由于编者水平有限,书中难免有不当之处,恳请广大师生在使用后提出宝贵意见和建议。

编者

目 录

第 6 章 三角计算	1
6.1 和角公式	1
6.2 二倍角公式	15
6.3 正弦型函数的图像和性质	19
6.4 解三角形	25
6.5 三角计算的应用	37
第 7 章 数 列	43
7.1 数列的概念	43
7.2 等差数列	48
7.3 等比数列	57
7.4 等差数列与等比数列的应用	64
第 8 章 排列组合	70
8.1 计数原理	70
8.2 排列与组合	79
8.3 二项式定理	91

第 9 章 随机变量及其分布	95
9.1 离散型随机变量及其分布	95
9.2 正态分布	107
 第 10 章 统 计	 110
10.1 集中趋势与离散程度	110
10.2 一元线性回归	118

第6章

三角计算

学习目标

1. 和角公式:了解两角和与两角差的正弦公式、余弦公式和正切公式在求值、化简及证明等方面的应用.
2. 倍角公式:理解二倍角的正弦公式、余弦公式和正切公式的推导过程及在求值、化简与证明等方面的应用.
3. 正弦型函数:了解正弦型函数与正弦函数之间的关系;初步掌握在一个周期上画正弦型函数简图的“五点法”;理解正弦型函数的图像和性质.
4. 解三角形:初步掌握用正弦定理和余弦定理解三角形的方法.
5. 三角计算的应用:初步掌握用三角计算解决实际问题的方法.

6.1 和角公式

6.1.1 两角和与差的余弦公式

同步训练

一、选择题

1. 下列式子正确的是().
A. $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x+y)$ B. $\sin x \sin y - \cos x \cos y = \cos(x+y)$
C. $\sin x \sin y - \cos x \cos y = \cos(x-y)$ D. $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$

2. 计算: $\cos 25^\circ \cos 5^\circ - \sin 25^\circ \sin 5^\circ = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\cos 20^\circ$ D. $\sin 20^\circ$

3. $\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \sin 55^\circ \sin 10^\circ = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cos 65^\circ$

4. $\sin 24^\circ \sin 36^\circ - \cos 24^\circ \cos 36^\circ = (\quad)$.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 15^\circ = (\quad)$.

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知角 α 为锐角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\cos(\alpha + 45^\circ) = (\quad)$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ D. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

7. 已知 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = (\quad)$.

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

二、填空题

1. $\sin 75^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知角 α 为锐角, 且 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 则:

(1) $\sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知角 α 为第四象限角, 且 $\cos \alpha = m$, 则 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$. (用 m 表示)

三、解答题

1. 求 $\sin 75^\circ \sin 45^\circ - \cos 75^\circ \cos 45^\circ$ 的值.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A = \frac{5}{13}$, 且 $\tan A < 0$, 求 $\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

能力提升

一、选择题

- 化简 $\cos(\alpha - \beta)\cos \beta + \sin(\alpha - \beta)\sin \beta =$ ().
 A. $\cos \beta$ B. $\cos \alpha$ C. $\cos(2\alpha - \beta)$ D. $\cos(\alpha - 2\beta)$
- 已知角 θ 的终边经过点 $P(\sqrt{2}, -\sqrt{7})$, 则 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) =$ ().
 A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{7}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{7}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{21}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{21}}{6}$
- 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan \alpha = 3$, 则 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ ().
 A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
- 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, 则 $\alpha - \beta =$ ().
 A. $-\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B = -\frac{3}{5}$, 则 $\cos C$ 的值为 ().
 A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{18}{25}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $-\frac{24}{25}$
- 已知向量 $\mathbf{a} = (\cos 75^\circ, \sin 75^\circ)$, $\mathbf{b} = (\cos 15^\circ, \sin 15^\circ)$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 的值为 ().
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

7. 已知 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 是方程 $5x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$ 的两个实根, 且 $\alpha \in (0, \pi)$, 则

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad).$$

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

B. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

二、填空题

1. $\frac{\cos 57^\circ + \frac{1}{2}\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 若 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 已知锐角 α, β 满足 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 则 $\alpha + \beta = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = \frac{\pi}{3}, \cos B = \frac{1}{3}$, 则 $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 $\mathbf{a} = (\cos 14^\circ, \cos 76^\circ), \mathbf{b} = (\cos 59^\circ, \cos 31^\circ)$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

1. 求值: (1) $\cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 100^\circ \cdot \sin 20^\circ$;

(2) $\cos 160^\circ \cos 25^\circ + \sin 20^\circ \cdot \sin 25^\circ$;

(3) $(\sin 75^\circ + \cos 75^\circ) \cdot (\sin 75^\circ - \cos 75^\circ).$

2. 利用公式 $C_{\alpha+\beta}$ 、 $C_{\alpha-\beta}$ 证明:

$$(1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$(2) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

3. (1) 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, α 是第四象限角, $\sin \beta = \frac{3}{5}$, β 是第二象限角, 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

(2) 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 且 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{16}{65}$, 求 $\cos \beta$ 的值.

6.1.2 两角和与差的正弦公式

同步训练

一、选择题

1. 下列等式成立的是().

A. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$

B. $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

C. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

D. $\sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

2. $\sin(x + y) \cos y - \cos(x + y) \sin y = ()$.

A. $\sin x$

B. $\cos x$

C. $\sin(x + 2y)$

D. $\cos(x + 2y)$

3. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = ()$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 1

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

4. $\sin 55^\circ \cos 10^\circ - \cos 55^\circ \sin 10^\circ = ()$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\sin 65^\circ$

5. 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = ()$.

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 已知 $\triangle ABC$ 中, $C = 15^\circ$, 则 $\sin(A + B) = ()$.

A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

C. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

D. $-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

7. $\sin 75^\circ + \cos 15^\circ = ()$.

A. 1

B. 0

C. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

二、填空题

1. 已知角 α, β 均为第一、二象限角.

(1) 若 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\cos \alpha =$ _____;

(2) 若 $\cos \beta = -\frac{4}{5}$, 则 $\sin \beta =$ _____.

2. 已知角 α, β 均为第一、二象限角, 若 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \beta = -\frac{12}{13}$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

3. 计算: $\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} =$ _____.

三、解答题

1. 计算: $\cos 12^\circ \sin 18^\circ + \sin 72^\circ \cos 78^\circ$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A = -\frac{3}{5}, \sin B = \frac{1}{2}$, 求 $\sin C$ 的值.

能力提升

一、选择题

1. $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ =$ ().

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 已知 $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, 则 $\sin \alpha =$ ().

A. 0

B. $\pm \frac{\sqrt{21}}{7}$

C. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知 $-\sqrt{3}\sin x + \cos x = A\sin(x-\beta)$, 其中 $A > 0, \beta \in (0, 2\pi)$, 则 $\beta =$ ().

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{7\pi}{6}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

4. 已知在锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}, \sin(A-B) = \frac{1}{5}$, 则 $\frac{\tan A}{\tan B} =$ ().

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 利用公式: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, 可得:

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$, 则 $\sin 20^\circ\cos 70^\circ + \sin 10^\circ\sin 50^\circ =$ ().

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, α 为第四象限角, 角 α 的终边与单位圆 O 交于点 $P(x_0, y_0)$,

若 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $y_0 =$ ().

- A. $\frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{-\sqrt{6}-3}{6}$ D. $\frac{\sqrt{6}-3}{6}$

二、填空题

1. 已知 α 为锐角, 且 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\alpha =$ _____.

2. 已知角 θ 的终边过点 $P(-3, 1)$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) =$ _____.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sin C =$ _____.

三、解答题

1. 化简求值:

(1) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

(2) $\cos(70^\circ+\alpha)\sin(170^\circ-\alpha) - \sin(70^\circ+\alpha)\cos(10^\circ+\alpha)$;

(3) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

2. 已知 α, β 都是锐角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\sin \beta$ 的值.

3. 已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P(-3, -4)$.

(1) 求 $\frac{6\sin \alpha}{3\cos \alpha - \sin \alpha}$ 的值;

(2) 若角 β 满足 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\cos \beta$ 的值.

6.1.3 两角和与差的正切公式

同步训练

一、选择题

1. $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = (\quad)$.

- A. 1 B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. 不存在

2. $\tan 105^\circ = (\quad)$.

- A. $\sqrt{3} - 2$ B. $-\sqrt{3} - 2$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $2 + \sqrt{3}$

3. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$, 则 $\tan(\alpha - \beta) = (\quad)$.

- A. 1 B. -1 C. $-\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{7}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A = \frac{1}{3}$, 则 $\tan(B + C) = (\quad)$.

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $-2\sqrt{2}$ D. 3

5. 已知 $\tan \alpha = m$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$.

- A. $\frac{m-1}{m+1}$ B. $\frac{m+1}{1-m}$ C. $\frac{1-m}{m+1}$ D. $\frac{m+1}{m-1}$

6. 已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 分别是方程 $3x^2 - 4x - 1 = 0$ 的两根, 则 $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$ 的值为 $(\quad)$.

- A. $-\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. 1 D. -1

7. $\tan 38^\circ + \tan 22^\circ + \sqrt{3} \tan 38^\circ \cdot \tan 22^\circ = (\quad)$.

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\sqrt{3}$

二、填空题

1. $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 则 $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 2$, 则 $\tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{12}{13}$, 求 $\tan C$ 的值.

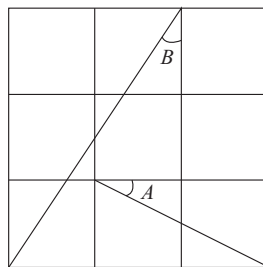
2. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}$, $\tan(\alpha - \beta) = 3$, 求 $\tan 2\alpha$ 和 $\tan 2\beta$ 的值.

能力提升

一、选择题

1. 如图, 在由九个相同的正方形组成的九宫格中, $\tan(B - A) = (\quad)$.

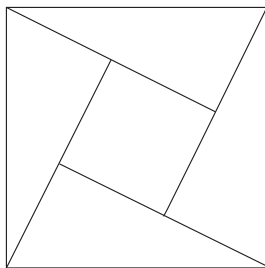
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$



2. 已知 $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin \theta = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$.
- A. 1 B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{7}$ D. 7
3. 已知 $\tan \alpha + \tan \beta = -6$, $\tan(\alpha + \beta) = -1$, 则 $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = (\quad)$.
- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
4. 若直线 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 的倾斜角为 α , 直线 $y = kx - 5$ 的倾斜角为 3α , 则 $k = (\quad)$.
- A. $\frac{4}{3}$ B. 5 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{11}{2}$
5. 在解决问题“已知 $\tan 80^\circ = m$, 请用 m 表示 $\tan 20^\circ$ 的值”时, 甲的结果为 $\frac{m - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}m}$, 乙的结果为 $\frac{2m}{m^2 - 1}$, 则下列结论正确的是 $(\quad)$.
- A. 甲、乙的结果都正确 B. 甲的结果正确、乙的结果错误
- C. 甲的结果错误、乙的结果正确 D. 甲、乙的结果都错误
6. 已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 - 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两根, 且 $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为 $(\quad)$.
- A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

二、填空题

1. 已知 $\frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}$, 请写出一个满足条件的角 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 2$, 则 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 若 $3\sin \alpha = 4\cos \alpha$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 我国古代数学家赵爽的弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形(如图). 如果小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 13, 直角三角形中较小的锐角为 θ , 那么 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.



三、解答题

1. 求值:

$$(1) \tan 12^\circ \tan 33^\circ + \tan 12^\circ + \tan 33^\circ;$$

$$(2) \frac{1 - \tan \frac{5\pi}{12}}{1 + \tan \frac{5\pi}{12}}.$$

2. 观察下列各等式:

$$\tan 10^\circ \tan 20^\circ + \tan 20^\circ \tan 60^\circ + \tan 60^\circ \tan 10^\circ = 1;$$

$$\tan 20^\circ \tan 30^\circ + \tan 30^\circ \tan 40^\circ + \tan 40^\circ \tan 20^\circ = 1;$$

$$\tan 33^\circ \tan 44^\circ + \tan 44^\circ \tan 13^\circ + \tan 33^\circ \tan 13^\circ = 1.$$

(1) 尝试再写出一个相同规律的式子;

(2) 写出能反映以上式子一般规律的恒等式, 并对你写出的恒等式进行证明.

3. 已知 $\tan A, \tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right)$ 是方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根, 若 $3\tan A = 2\tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right)$, 求 p 与 q 的值.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{4}{5}, \tan B = 2$,

(1) 求 $\tan(A+B)$ 的值;

(2) 求 $\tan(2A+2B)$ 的值.

6.2 二倍角公式

同步训练

一、选择题

1. $\sin 22.5^\circ \cos 22.5^\circ = (\quad)$.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

2. $\sin^2 25^\circ = (\quad)$.

A. $\frac{1+\sin 50^\circ}{2}$

B. $\frac{1-\sin 50^\circ}{2}$

C. $\frac{1+\cos 50^\circ}{2}$

D. $\frac{1-\cos 50^\circ}{2}$

3. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2\alpha = (\quad)$.

A. $-\frac{24}{7}$

B. $\frac{24}{7}$

C. $\frac{12}{7}$

D. $-\frac{12}{7}$

4. 已知 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha = (\quad)$.

A. $-\frac{24}{25}$

B. $\frac{24}{25}$

C. $\frac{12}{25}$

D. $-\frac{12}{25}$

5. 若 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = m$, 且 α 为第二象限角, 则 $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\quad)$.

A. $1-2m^2$

B. $1+2m^2$

C. $2m^2-1$

D. $2m^2$

6. $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 15^\circ = (\quad)$.

A. $\frac{1}{8}$

B. $-\frac{1}{8}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{8}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

7. 下列各式的值为 $\frac{1}{2}$ 的是 $(\quad)$.

A. $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$

B. $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$

C. $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$

D. $\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ$

8. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = (\quad)$.

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{16}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{9}$

二、填空题

1. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $\cos(2025\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知 $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 且 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 已知 $\tan \alpha = 2$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{2}{5}$, 求 $\tan 2\beta$ 的值.

2. 已知 $\tan \theta = -2$, 求 $\frac{\sin 2\theta - 4\cos^2 \theta}{1 - \cos 2\theta}$ 的值.

能力提升

一、选择题

- 已知角 α 的终边过点 $(-3, 4)$, 则 $\sin 2\alpha = (\quad)$.
 A. $-\frac{24}{25}$ B. $\frac{24}{25}$ C. $-\frac{7}{24}$ D. $\frac{7}{24}$
- 已知直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的倾斜角为 θ , 则 $\cos 2\theta$ 的值是 $(\quad)$.
 A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{4}$
- 若 $4\cos^2\alpha + \sin(\pi + 2\alpha) = 2$, 则 $\tan 2\alpha = (\quad)$.
 A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
- 若 $\sin x \cdot \tan x < 0$, 则 $\sqrt{1 + \cos 2x} = (\quad)$.
 A. $\sqrt{2} \cos x$ B. $-\sqrt{2} \cos x$ C. $\sqrt{2} \sin x$ D. $-\sqrt{2} \sin x$
- 已知向量 $\mathbf{a} = (2, \tan \theta)$, $\mathbf{b} = \left(\cos \theta, -\frac{2}{5}\right)$, 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\cos 2\theta = (\quad)$.
 A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $-\frac{7}{25}$
- 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A \cos A = \cos^2 A - \frac{1}{2}$, 则 $A = (\quad)$.
 A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{4}$
- “ $\cos \theta > 0$ 且 $\sin 2\theta < 0$ ”是“ θ 为第四象限角”的 $(\quad)$.
 A. 充要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

- 已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 且 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{\sin 2\alpha + 1}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知等腰三角形底角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 则顶角的正弦值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- 若过点 $(-3, 0)$ 的直线 l_1 的倾斜角是直线 $l_2: \sqrt{2}x - 2y + a = 0$ 倾斜角的两倍, 则直线 l_1 的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

1. 化简:

$$(1) \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12};$$

$$(2) \cos^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^4 \frac{\alpha}{2};$$

$$(3) \frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ};$$

$$(4) (\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ)(1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ).$$

2. 已知 $\sin(\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$.

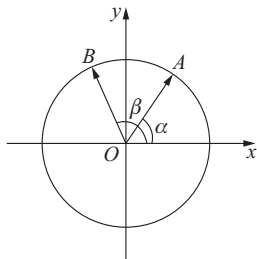
(1) 求 $\sin 2\alpha$ 的值;

(2) 若 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 求 $\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}$ 的值.

3. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,锐角 α 和钝角 β 的终边分别与单位圆交于 A, B 两点,且 A, B 两点的横坐标分别为 $\frac{3}{5}, -\frac{5}{13}$.

(1) 求 $\cos(\beta - \alpha)$ 的值;

(2) 求 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) - \cos^2 \alpha$ 的值.



6.3 正弦型函数的图像和性质

同步训练

一、选择题

1. 函数 $y = \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2}$ 的周期、最大值是().

A. $3\pi, 1$ B. $3\pi, \frac{1}{2}$ C. $6\pi, 1$ D. $6\pi, \frac{1}{2}$.

2. 函数 $y = \sin 2x$ 的单调递增区间是().

A. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ B. $[-\pi, \pi]$
C. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ D. $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

3. 函数 $f(x) = \sin x - \cos x$ 的最大值为().

A. 1 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

中等职业学校职教高考公共基础课配套用书

数学同步学习辅导

拓展模块一 下册

参考答案

第 6 章 三角计算

6.1 和角公式

6.1.1 两角和与差的余弦公式

【同步训练】

一、选择题

1. D 【解析】对照公式特征进行筛选,只有 D 正确.

2. B 【解析】 $\cos 25^\circ \cos 5^\circ - \sin 25^\circ \sin 5^\circ = \cos(25^\circ + 5^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. B 【解析】 $\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \sin 55^\circ \sin 10^\circ = \cos(55^\circ - 10^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. C 【解析】 $\sin 24^\circ \sin 36^\circ - \cos 24^\circ \cos 36^\circ = -(\cos 24^\circ \cos 36^\circ - \sin 24^\circ \sin 36^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

5. C 【解析】 $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 15^\circ - \sin 45^\circ \sin 15^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

6. A 【解析】因为 α 为锐角,所以 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$,故 $\cos(\alpha + 45^\circ) = \cos \alpha \cos 45^\circ - \sin \alpha \sin 45^\circ = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

7. B 【解析】 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = -\sin \alpha = -\frac{2}{3}$.

二、填空题

1. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ 【解析】 $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ 【解析】(1) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, α 为锐角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; (2) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

3. $-\sqrt{1-m^2}$ 【解析】由题意得 $\sin \alpha = -\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = -\sqrt{1-m^2}$,故 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = -\sqrt{1-m^2}$.

三、解答题

1. 【答案】 $\frac{1}{2}$.

【详解】 $\sin 75^\circ \sin 45^\circ - \cos 75^\circ \cos 45^\circ = -(\cos 75^\circ \cos 45^\circ - \sin 75^\circ \sin 45^\circ) = -\cos 120^\circ = \frac{1}{2}$.

2. 【答案】 $-\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$.

【详解】 因为 $\tan A < 0$, 所以角 A 为钝角, 故 $\cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 A} = -\frac{12}{13}$.

所以 $\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \cos A \cos \frac{\pi}{3} - \sin A \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{12}{13} \times \frac{1}{2} - \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$.

【能力提升】

一、选择题

1. 【答案】 D

【分析】 根据两角差的余弦公式可求出结果.

【详解】 $\cos(\alpha - \beta) \cos \beta + \sin(\alpha - \beta) \sin \beta = \cos[(\alpha - \beta) - \beta] = \cos(\alpha - 2\beta)$.

故选: D.

2. 【答案】 D

【分析】 根据三角函数的定义求出 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$, 用两角和的余弦公式展开 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ 即可计算.

【详解】 因为角 θ 的终边经过点 $P(\sqrt{2}, -\sqrt{7})$, 则 P 到原点距离为 $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{7})^2} = 3$,

所以 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sin \theta = -\frac{\sqrt{7}}{3}$,

所以 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{21}}{6}$.

故选: D.

3. 【答案】 B

【分析】 由 α 的正切值, 求出 α 的正弦及余弦值, 再结合两角差的余弦公式展开求解.

【详解】 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$, 则 $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

则 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选: B.

4. 【答案】 A

【分析】先利用平方关系求出 $\cos \alpha$ 和 $\sin \beta$, 再利用两角差的余弦公式将 $\cos(\alpha - \beta)$ 展开计算, 根据余弦值及角的范围可得角的大小.

【详解】因为 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$,

$$\text{所以 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又因为 $\sin \alpha < \sin \beta$, 所以 $\alpha < \beta$,

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < 0,$$

$$\text{所以 } \alpha - \beta = -\frac{\pi}{4}.$$

故选: A.

【点睛】本题考查两角差的余弦公式的应用, 属于基础题.

5. 【答案】C

【分析】先利用平方关系求出 $\sin A$, $\sin B$, 再利用两角和的余弦公式将 $\cos C = -\cos(A + B)$ 展开计算.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\cos A = \frac{4}{5}$, 得 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{3}{5}$,

$$\text{由 } \cos B = -\frac{3}{5}, \text{ 得 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{4}{5},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos C &= \cos[\pi - (A + B)] = -\cos(A + B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \\ &= -\frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}. \end{aligned}$$

故选: C.

【点睛】本题主要考查两角和的余弦公式的应用, 属于基础题.

6. 【答案】B

【分析】利用 $|a - b| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b}$ 化简计算得解.

【详解】由题得 $|a| = |b| = 1$,

$$\begin{aligned} \text{由题得 } |a - b| &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b} = \sqrt{1 + 1 - 2(\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos 60^\circ} = 1. \end{aligned}$$

故选: B.

【点睛】本题主要考查向量的模的计算, 考查向量的数量积和两角差的余弦公式的应用, 意在考查学生对这些知识的掌握水平.

7. 【答案】D

【分析】根据韦达定理可得 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{5}$, 结合 $\alpha \in (0, \pi)$, 可得 $\cos \alpha - \sin \alpha < 0$, 根据两角和的余弦公式可得 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 4\sin \alpha \cos \alpha}$, 由此可得结果.

【详解】因为 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 是方程 $5x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$ 的两个实根,

$$\text{所以 } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{5},$$

因为 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$, 所以 $\sin \alpha > 0$ 且 $\cos \alpha < 0$,

所以 $\cos \alpha - \sin \alpha < 0$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 4\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 4 \times \frac{2}{5}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}. \end{aligned}$$

故选:D.

【点睛】本题考查了韦达定理、两角和的余弦公式,属于基础题.

二、填空题

1. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】将 $\cos 57^\circ = \cos(27^\circ + 30^\circ)$ 展开代入计算可得结果.

$$\begin{aligned} \text{【详解】原式} &= \frac{\cos(27^\circ + 30^\circ) + \frac{1}{2}\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{\cos 27^\circ \cos 30^\circ - \sin 27^\circ \sin 30^\circ + \frac{1}{2}\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} \\ &= \frac{\cos 27^\circ \cos 30^\circ}{\cos 27^\circ} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题主要考查两角和的余弦公式的应用,属于基础题.

2. 【答案】 0

【分析】先求出 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, 再利用两角差的余弦公式求解.

【详解】因为 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,

所以 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$,

所以 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 0$.

故答案为:0.

3. 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【详解】由题意知 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

故答案为: $\frac{\pi}{4}$.

【点睛】本题主要考查三角函数的运算.

4. 【答案】 $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$

【分析】由 $C = \pi - (A + B)$, 可得 $\cos C = -\cos(A + B)$, 结合两角和的余弦公式, 即可求解.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\cos B = \frac{1}{3}$, 可得 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

又由 $C = \pi - (A + B)$, 可得 $\cos C = -\cos(A + B)$,

因为 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1-2\sqrt{6}}{6}$,

所以 $\cos C = \frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

故答案为: $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

5. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】由向量数量积的坐标运算结合诱导公式和两角差的余弦公式即可得解.

【详解】因为 $\mathbf{a} = (\cos 14^\circ, \cos 76^\circ)$, $\mathbf{b} = (\cos 59^\circ, \cos 31^\circ)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \cos 14^\circ \cos 59^\circ + \cos 76^\circ \cos 31^\circ \\ &= \cos 14^\circ \cos 59^\circ + \sin 14^\circ \sin 59^\circ \\ &= \cos(59^\circ - 14^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了向量数量积的坐标运算及诱导公式和两角差的余弦公式,属于基础题.

三、解答题

1. 【答案】(1) $\frac{1}{2}$; (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【分析】(1)(2)先利用诱导公式变形,目的为变同角,再利用两角和与差的余弦公式可得.
(3)先用平方差公式变形,再逆用两角和的余弦公式可得.

【详解】(1)原式 $= \cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ = \cos(80^\circ - 20^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} (2) \text{原式} &= -\cos 20^\circ \cos 25^\circ + \sin 20^\circ \cdot \sin 25^\circ \\ &= -(\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \cdot \sin 25^\circ) \\ &= -\cos(20^\circ + 25^\circ) \\ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{原式} &= \sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ \\ &= -(\cos 75^\circ \cdot \cos 75^\circ - \sin 75^\circ \cdot \sin 75^\circ) \\ &= -\cos(75^\circ + 75^\circ) = -\cos 150^\circ \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查两角和与差的余弦公式,是基础题.

2. 【答案】(1)证明见详解;(2)证明见详解.

【分析】(1)根据 $C_{\alpha-\beta}$ 证明;(2)根据 $C_{\alpha+\beta}$ 证明.

【详解】(1)由 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, 可得:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \sin \alpha.$$

(2)由 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, 可得:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = -\sin \alpha.$$

3. 【答案】(1) $-\frac{4+6\sqrt{2}}{15}$; (2) $\frac{204}{325}$.

【分析】(1)利用角的范围、同角三角函数的平方关系及三角恒等变换计算即可.

(2)利用角的范围、同角三角函数的平方关系及三角恒等变换计算即可.

【详解】(1)由题意可知 $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{4}{5}$,

$$\text{所以 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{4}{15} - \frac{6\sqrt{2}}{15} = -\frac{4+6\sqrt{2}}{15}.$$

(2) 由题意可知 $0 < \alpha + \beta < \pi$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{63}{65}$,

且 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \cos \beta &= \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha \\ &= -\frac{16}{65} \times \frac{3}{5} + \frac{63}{65} \times \frac{4}{5} = \frac{204}{325}.\end{aligned}$$

6.1.2 两角和与差的正弦公式

【同步训练】

一、选择题

1. C 【解析】对照公式特征进行筛选.

2. A 【解析】 $\sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y = \sin(x+y-y) = \sin x$.

3. B 【解析】 $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ = 1$.

4. B 【解析】 $\sin 55^\circ \cos 10^\circ - \cos 55^\circ \sin 10^\circ = \sin(55^\circ - 10^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. A 【解析】 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

6. B 【解析】 $\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

7. C 【解析】 $\sin 75^\circ + \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

二、填空题

1. (1) $\pm \frac{3}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$ 【解析】(1) 根据 $\cos \alpha$ 的符号特征和平方关系计算; (2) 根据 $\sin \beta$ 的符号特征和平方关系计算.

2. $-\frac{63}{65}$ 【解析】由 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, 得 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{5}{13}$, 故 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = -\frac{63}{65}$.

3. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 【解析】: $\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

三、解答题

1. 【答案】 $\frac{1}{2}$.

【详解】 $\cos 12^\circ \sin 18^\circ + \sin 72^\circ \cos 78^\circ = \sin 18^\circ \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \sin 12^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

2. 【答案】 $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

【详解】因为 $\cos A = -\frac{3}{5} < 0$, 所以 A 为钝角, 且 $\sin A = \frac{4}{5}$. 由 $\sin B = \frac{1}{2}$, 得 $B = 30^\circ$,

所以 $\sin C = \sin(150^\circ - A) = \sin 150^\circ \cos A - \cos 150^\circ \sin A = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{4}{5} =$

$$\frac{4\sqrt{3}-3}{10}.$$

【能力提升】

一、选择题

1. 【答案】A

【分析】根据辅助角公式, 化简计算即可得出答案.

【详解】 $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \sqrt{2} \sin(15^\circ + 45^\circ) = \sqrt{2} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选: A.

2. 【答案】A

【分析】利用两角和与差的正弦公式将题目所给条件化简, 得到关于 $\sin \alpha$ 的方程, 解之即可求得 $\sin \alpha$ 的值.

【详解】 $\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \alpha + \left(-\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha\right) = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha,$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha,$$

$$\text{又 } \sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right),$$

$$\text{则 } \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha, \text{ 则 } \sin \alpha = 0.$$

故选: A.

3. 【答案】C

【分析】利用辅助角公式和两角和的正弦公式化简即可求出结果.

【详解】 $-\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) = 2 \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = A \sin(x - \beta),$

$$\text{所以 } -\beta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

因为 $\beta \in (0, 2\pi)$,

$$\text{所以 } \beta = \frac{7\pi}{6}.$$

故选:C.

4. 【答案】B

【分析】利用两角和与差的正弦公式将等式展开,解得 $\sin A \cos B$ 和 $\cos A \sin B$,相除得到答案.

【详解】因为在锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$, $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$,

$$\text{所以} \begin{cases} \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{3}{5}, \\ \sin A \cos B - \cos A \sin B = \frac{1}{5}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \sin A \cos B = \frac{2}{5}, \\ \cos A \sin B = \frac{1}{5}. \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B} = \frac{\tan A}{\tan B} = 2.$$

故选:B.

【点睛】本题考查了两角和与差的正弦公式、三角恒等变换,意在考查学生的计算能力.

5. 【答案】A

【分析】根据题目所给公式计算化简即可求值.

【详解】由 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ 可得,

$$\sin 20^\circ \cos 70^\circ = \frac{1}{2}[\sin(20^\circ+70^\circ) + \sin(20^\circ-70^\circ)] = \frac{1}{2}\sin 90^\circ + \frac{1}{2}\sin(-50^\circ),$$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ = \sin 10^\circ \sin(90^\circ-40^\circ) = \sin 10^\circ \cos 40^\circ$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(10^\circ+40^\circ) + \sin(10^\circ-40^\circ)] = \frac{1}{2}\sin 50^\circ + \frac{1}{2}\sin(-30^\circ),$$

$$\text{所以} \sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin 10^\circ \sin 50^\circ = \frac{1}{2}\sin 90^\circ + \frac{1}{2}\sin(-50^\circ) + \frac{1}{2}\sin 50^\circ + \frac{1}{2}\sin(-30^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 90^\circ - \frac{1}{2}\sin 50^\circ + \frac{1}{2}\sin 50^\circ - \frac{1}{2}\sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

故选:A.

6. 【答案】C

【分析】利用三角函数的定义和同角的基本关系及两角和的正弦公式即可求出答案.

【详解】因为 α 为第四象限角,所以 $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi + 2\pi\right), k \in \mathbf{Z}$,

$$\alpha - \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z},$$

由 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 可得 $\alpha - \frac{\pi}{3}$ 在第三象限,

所以 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{1 - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$,

$$\begin{aligned} y_0 = \sin \alpha &= \sin\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{6} - 3}{6}. \end{aligned}$$

故选:C.

二、填空题

1. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{10}$

【分析】 本题考查三角恒等关系的应用. 本题中整体思想的应用是将 α 转化成 $\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$, 然后利用两角差的正弦公式; 也就是先求得 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, 后代入计算即可. 本题关键是考查三角函数中的整体思想应用, 遵循角度统一原则.

【详解】 因为 α 为锐角, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, 所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$, 所以 $\sin \alpha = \sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

2. 【答案】 $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【分析】 先根据三角函数的定义求出 $\sin \theta, \cos \theta$, 再根据两角差的正弦公式即可得解.

【详解】 因为角 θ 的终边过点 $P(-3, 1)$,

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{9+1}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{9+1}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. 【答案】 $\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{6}$

【分析】 先求出 $\sin A, \cos B$, 利用诱导公式 $\sin C = \sin(A+B)$ 进行计算即可.

【详解】由 $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $A = \frac{\pi}{4}$, 因为 $\sin A > \sin B$, 所以 $A > B$, 所以 $\cos B > 0$.

由 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 得 $\cos B = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 又因为 $\sin C = \sin[\pi - (A + B)] = \sin(A + B)$,

所以 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{6}$.

即 $\sin C = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{6}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{6}$.

【点睛】本题考查两角和的正弦公式、三角函数的诱导公式. 对于三角形, 解题中用大边对大角原则可快速确定边角关系, 形如 $\sin C = \sin(A + B)$ 应作为常规公式加以记忆, 属于基础题.

三、解答题

1. 【答案】(1) $\sin 2\alpha$; (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) 4.

【分析】(1) 直接利用两角和与差的正弦公式即可;
(2) 利用诱导公式和两角和与差的正弦公式即可;
(3) 通分, 然后用辅助角公式计算即可.

【详解】(1) 原式 $= \sin(\alpha + \beta + \alpha - \beta) = \sin 2\alpha$.

(2) 原式 $= \cos(70^\circ + \alpha) \sin[180^\circ - (10^\circ + \alpha)] - \sin(70^\circ + \alpha) \cos(10^\circ + \alpha)$
 $= \cos(70^\circ + \alpha) \sin(10^\circ + \alpha) - \sin(70^\circ + \alpha) \cos(10^\circ + \alpha)$
 $= \sin[(10^\circ + \alpha) - (70^\circ + \alpha)] = \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} =$
 $\frac{2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = 4$.

2. 【答案】 $\frac{16}{65}$.

【分析】先通过角的范围求出 $\cos \alpha, \sin(\alpha + \beta)$, 再通过 $\sin \beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha)$, 利用两角差的正弦公式计算即可.

【详解】因为 α, β 都是锐角, 则 $0 < \alpha + \beta < \pi$,

又 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} > 0$, 所以 $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{所以 } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5}, \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{12}{13},$$

$$\text{所以 } \sin \beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$= \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{65}.$$

$$3. \text{【答案】} (1) \frac{24}{5}; (2) -\frac{56}{65} \text{ 或 } \frac{16}{65}.$$

【分析】(1) 先根据三角函数的定义得 $\tan \alpha$, 再根据同角三角函数关系计算即可;

(2) 根据三角函数的定义得 $\sin \alpha, \cos \alpha$, 再根据同角三角函数关系得 $\cos(\alpha + \beta)$, 最后根据 $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$, 利用两角差的余弦公式计算即可.

$$\text{【详解】} (1) \text{ 由角 } \alpha \text{ 的终边过点 } P(-3, -4), \text{ 得 } \tan \alpha = \frac{4}{3},$$

$$\frac{6 \sin \alpha}{3 \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{6 \tan \alpha}{3 - \tan \alpha} = \frac{6 \times \frac{4}{3}}{3 - \frac{4}{3}} = \frac{24}{5}.$$

$$(2) \text{ 由角 } \alpha \text{ 的终边过点 } P(-3, -4), \text{ 得 } \sin \alpha = -\frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5},$$

$$\text{由 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}, \text{ 得 } \cos(\alpha + \beta) = \pm \frac{12}{13}.$$

$$\text{由 } \beta = (\alpha + \beta) - \alpha, \text{ 得 } \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha,$$

$$\text{分别代入得, } \cos \beta = -\frac{56}{65} \text{ 或 } \cos \beta = \frac{16}{65}.$$

6.1.3 两角和与差的正切公式

【同步训练】

一、选择题

$$1. \text{ B } \quad \text{【解析】} \tan 15^\circ + \tan 75^\circ = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4.$$

$$2. \text{ B } \quad \text{【解析】} \tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -\sqrt{3} - 2.$$

$$3. \text{ D } \quad \text{【解析】} \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{7}.$$

$$4. \text{ C } \quad \text{【解析】} \text{ 由 } \cos A = \frac{1}{3}, \text{ 得 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{故 } \tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A = -2\sqrt{2}.$$

5. A 【解析】 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{m-1}{1+m}.$

6. C 【解析】 由根与系数的关系得 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{4}{3}, \tan \alpha \tan \beta = -\frac{1}{3},$ 故 $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \cdot \tan \beta = 1.$

7. B 【解析】 由 $\tan 60^\circ = \tan(38^\circ + 22^\circ) = \frac{\tan 38^\circ + \tan 22^\circ}{1 - \tan 38^\circ \cdot \tan 22^\circ} = \sqrt{3},$ 得 $\tan 38^\circ + \tan 22^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 38^\circ \cdot \tan 22^\circ,$ 所以 $\tan 38^\circ + \tan 22^\circ + \sqrt{3} \tan 38^\circ \cdot \tan 22^\circ = \sqrt{3}.$

二、填空题

1. $\sqrt{3}$ 【解析】 $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 15^\circ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$

2. $\frac{1}{3}$ 【解析】 $\tan \alpha = \tan[(\alpha - \beta) + \beta] = \frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{3}.$

3. -1 【解析】 由 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 2,$ 得 $1 - (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta = 2,$ 则 $\tan \alpha + \tan \beta = -(1 - \tan \alpha \tan \beta),$ 所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -1.$

三、解答题

1. 【答案】 $-\frac{56}{33}.$

【详解】 由 $\cos A = \frac{4}{5}$ 得 $\sin A = \frac{3}{5},$ 由 $\cos B = \frac{12}{13}$ 得 $\sin B = \frac{5}{13},$ 则 $\tan A = \frac{3}{4}, \tan B = \frac{5}{12},$

$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}} = \frac{56}{33},$ 所以 $\tan C = -\tan(A+B) = -\frac{56}{33}.$

2. 【答案】 $\tan 2\alpha = 8, \tan 2\beta = -\frac{7}{4}.$

【详解】 $\tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{1}{5} + 3}{1 - \frac{1}{5} \times 3} = 8,$

$\tan 2\beta = \tan[(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{1}{5} - 3}{1 + \frac{1}{5} \times 3} = -\frac{7}{4}.$

【能力提升】

一、选择题

1. 【答案】B

【分析】根据九宫格求出 $\tan A$ 和 $\tan B$, 再由两角差的正切公式计算即可.

【详解】由图可知 $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{2}{3}$, 则 $\tan(B-A) = \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \tan A} = \frac{1}{8}$.

故选:B.

2. 【答案】D

【分析】先利用同角三角函数关系求得 $\tan \theta$, 再利用两角和的正切公式计算求解.

【详解】因为 $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin \theta = -\frac{3}{5}$, 所以 $\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\frac{4}{5}$,

$$\text{可得 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{3}{4} \times 1} = 7.$$

故选:D.

3. 【答案】D

【分析】根据已知条件求得 $\tan \alpha \tan \beta = -5$, 再根据两角和与差的正切公式, 即可得出答案.

【详解】因为 $\tan \alpha + \tan \beta = -6$, $\tan(\alpha + \beta) = -1$,

$$\text{所以 } \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -1, \text{ 则 } \tan \alpha \tan \beta = -5,$$

$$\text{所以 } \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-6}{1 - 5} = \frac{3}{2}.$$

故选:D.

4. 【答案】D

【分析】通过三角恒等变换的知识求得 $\tan 3\alpha$, 从而求得正确答案.

【详解】依题意可得 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3}$,

$$\tan 3\alpha = \tan(\alpha + 2\alpha) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}} = \frac{11}{2}, \text{ 故 } k = \tan 3\alpha = \frac{11}{2}.$$

故选:D.

5. 【答案】A