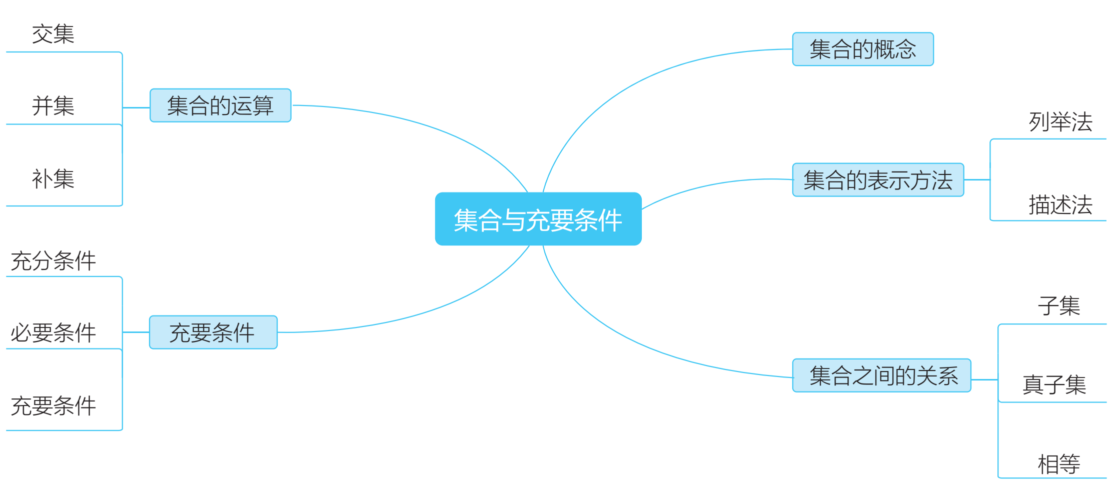
第一章 集合与充要条件

考纲要求

知识内容	考试层次要求		
	了解	理解	掌握
集合的概念	√		
集合的表示方法			√
集合之间的关系			√
集合的运算		√	
充要条件	√		

思维导图



考点分析

本章内容在历年考卷中多以选择题形式出现，要求不高，难度不大.涉及的知识点有：集合的有关概念与表示方法；集合间的关系；集合的运算；充分条件、必要条件与充要条件的判定定理，常与不等式、函数、数列等内容相关联.

第一节　集合的概念与表示法

考点精讲

一、集合的概念

1. 集合的概念

将具有某种属性的一些确定对象看成一个整体，便形成一个集合，常用大写的英文字母 A、B、C 表示.

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素，常用小写英文字母 a，b，c 来表示. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

2. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的一个元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in \mathbf{A}$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$.

3. 常用数集

正整数集，记作 $\mathbf{Z}^+$ 或 $\mathbf{N}^*$；自然数集，记作 $\mathbf{N}$；整数集，记作 $\mathbf{Z}$；有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；实数集，记作 $\mathbf{R}$.

4. 集合的分类

有限集：含有有限个元素的集合称为有限集.

无限集：含有无限个元素的集合称为无限集.

空集：不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$.

二、集合的表示方法

1. 集合的两种表示法

列举法：把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，中间用逗号隔开，这种表示集合的方法叫作列举法.

描述法：用集合所含元素的共同特性表示集合的方法称为描述法. 描述法表示的一般形式是 $\{x \mid p(x)\}$，其中“x”是集合中元素的代表形式，“$p(x)$”是集合中元素的共同特征，两者之间的竖线不可省略.

2. 常见的集合表示

(1)方程的解集：$\{x \mid x^2-3x+2=0\}$ 或 $\{1,2\}$，一般用列举法表示.

(2)方程组的解集:$\{(3,1)\}$或$\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x-2y=1\\x+3y=6\end{cases}\right\}=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\right\}$,一般用描述法表示.

(3)不等式的解集:$\{x\mid 3\leqslant x<5\}$或$[3,5)$,一般用区间表示.

(4)点集:$\{(x,y)\mid y=2x+1\}$.

(5)具有某种性质的点集:$\{M\mid |PM|=a\}$(P 为定点).

(6)三角函数中角的集合表示,如 $M=\{\alpha\mid 2k\pi<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

例题分析

一 集合的概念

例 1 下列对象不能组成集合的是(　　).

A. 我国著名的数学家　　B. 直角坐标平面内,第二象限的所有点.

C. 某校参加对口升学考试的学生　　D. 绝对值小于 0 的实数

解 选项 A 中,“我国著名的数学家”不是一个明确的标准,不能组成一个集合;选项 B 中,对象虽然无限个,但它是确定的,可以组成一个集合;选项 C 中,参加考试的学生是确定的,可以组成一个集合;选项 D 中,绝对值小于 0 的实数是不存在,故集合为空集,也能组成集合. 因此选 A.

强化训练 1

下列对象能构成集合的是(　　).

A. 个子高的同学　　B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数　　D. 成绩优秀的同学

解 由“集合元素的确定性”可知,“个子高”“与 0 接近”“优秀的”都是不确定的,故选 C.

例 2 设集合 $A=\{0\}$,下列结论正确的是(　　).

A. $A=0$　　B. $0\subseteq A$　　C. $0\in A$　　D. $0\notin A$

解 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

强化训练 2

设集合 $A=\{x\mid x>1\}$,$a=\sqrt{3}$,下列结论正确的是(　　).

A. $a\in A$　　B. $a\notin A$　　C. $a\subseteq A$　　D. $\{a\}\in A$

解 选项 C,D 对有关符号的使用是不正确的,又因为$\sqrt{3}>1$,所以选 A.

例 3 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素,求 a 的值.

(2)若 A 中恰有两个元素,求 a 的取值范围.

(3)若 A 中至多只有一个元素,求 a 的取值范围.

解　(1)若 A 中只有一个元素,分两种情况讨论:

当 $a=0$ 时, $A=\{x\mid 2x+1=0\}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$,

当 $a\neq 0$ 时,则 $ax^2+2x+1=0$ 有两个相等的根,即 $\Delta=4-4a=0$,解得 $a=1$.

所以 $a=0$ 或 $a=1$,A 中只有一个元素.

(2)若 A 中恰有两个元素,则 $ax^2+2x+1=0$ 有两个不相等的根,即 $\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta=4-4a>0,\end{cases}$ 解得 $a<1$.

所以 $a<1$ 时,A 中恰有两个元素.

(3)若 A 中至多只有一个元素包含两种情况:A 中只有一个元素或 A 为 $\varnothing$.

由(1)可知 $a=0$ 或 $a=1$,A 中只有一个元素.

若 A 为 $\varnothing$,则 $ax^2+2x+1=0$ 无解,即 $\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta=4-4a<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$.

所以当 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$ 时,A 中至多只有一个元素.

强化训练 3

已知集合 $\{1,x,x^2\}$,求实数 x 的不能取值的集合.

解　根据集合中元素互异性,则 $\begin{cases}x\neq 1,\\ x^2\neq x,\\ x^2\neq 1,\end{cases}$ 解得 $x\neq -1$,$x\neq 0$ 且 $x\neq 1$,所以实数 x 的不能取值的集合为 $\{-1,0,1\}$.

二　集合的表示方法

例 4　用适当的方法表示下列集合:

(1)大于 1 且小于 5 的整数.

(2)方程 $x^2=1$ 的解集.

(3)所有能被 3 整除的整数组成的集合.

解　(1)大于 1 小于 5 的整数有 2,3,4,所以集合用列举法表示为 $\{2,3,4\}$.

(2) $x^2=1$ 的解集为 $x=1$ 或 $x=-1$，所以集合用列举法表示为 $\{-1,1\}$.

(3) 能被 3 整除的都是 3 的倍数，可用 $3n$ 来表示，所以集合可用描述法表示为 $\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$.

强化训练 4

用合适的方法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2+x-6=0$ 的所有实数根组成的集合.

(2) 平面直角坐标系中第一象限的所有点组成的集合.

(3) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$.

(4) 大于 0 且小于 1 的自然数.

解 (1) $x^2+x-6=0$ 的解集为 $x=-3$ 或 $x=2$，所以集合用列举法表示为 $\{-3,2\}$.

(2) 平面直角坐标系中第一象限的所有点可用集合表示为 $\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$.

(3) 每个元素都是整数的倒数，所以集合可用描述法表示为 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{1}{n},n\in\mathbf{N}^*\right\}$.

(4) 大于 0 且小于 1 的自然数是不存在的，所以集合为 $\varnothing$.

专项检测

一、选择题

1. 下列命题所列对象中能组成集合的是(　　).

A. 坏人　　B. 非常大的数

C. 有趣的数学书　　D. 小于 10 的数

2. 下列对象不能组成集合的是(　　).

A. 所有小于 10 的自然数　　B. 某班个子高的同学

C. 方程 $x^2-1=0$ 的所有解　　D. 不等式 $x-2>0$ 的所有解

3. 下列选项中表述正确的是(　　).

A. 由 1,3,5,7,5,3 组成的集合中有 6 个元素

B. 集合$\{2,3\}$和集合$\{3,2\}$是不同的集合

C. 集合$\{0\}$是空集

D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

4. 给出下面四个关系：①$0\in\mathbf{Q}$；②$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$；③$\mathbf{Z}\in\mathbf{Q}$；④$\varnothing\notin\{0\}$，其中正确的个数为(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5. 用列举法表示集合$\{x\mid x^2-2x+1=0\}$的结果是(　　).

A. (1)　　B. 1

C. $\{1\}$　　D. 以上都不是

6. 下列几何中为无限集合的是(　　).

A. $\{x\mid 3<x<5\}$　　B. $\{x\mid 3<x<5$ 且 $x\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$　　D. $\{a,b\}$

二、填空题

7. 用适当的符号($\in,\notin,=,\neq$)填空.

(1)3 ________ $\{2,3\}$；　(2)π ________ $\mathbf{Z}$；　(3)1,2,3 ________ $\mathbf{Z}$；

(4)$\{-3,3\}$ ________ $\{x\mid x^2=9\}$；　(5)$\{5\}$ ________ $\{x\mid x^2=5\}$；　(6)2 ________ $\{x\mid x^2-8=0\}$.

8. 已知集合 $P=\{x\mid 2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$，已知集合 P 中恰有 3 个元素，则整数 $a=$________.

9. 写出方程 $x+2=2$ 的解集________.

10. 写出所有奇数组成的集合________.

11. 不大于 5 的所有实数组成的集合________.

三、判断题

12. 方程 $x+5=0$ 的解集是 $x=-5$.　(　　)

13. 集合$\{0\}$是空集.　(　　)

14. 大于 5 且小于 11 的偶数组成的集合是$\{6,8,10\}$.　(　　)

四、解答题

15. 用列举法表示下列集合：

(1)由大于-4且小于 12 的所有偶数组成的集合；

(2)方程 $x^2-5x-6=0$ 的解集.

第二节 集合之间的关系与运算

真题点拨

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A\cup B=$（　　）.

A. $\{3\}$　　B. $\{3,4\}$

C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

·解析· 因为 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$，故选 D.

2. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{1,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

·解析· 集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{2,3\}$，故选 B.

3. 设集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,3\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{1\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

·解析· 集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,3\}$，所以 $A\cap B=\{1\}$，故选 C.

4. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,a\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则 $a=$________.

·解析· 根据并集运算可知 $a=4$.

5. 设集合 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,6,9\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $\{3\}$

C. $\{1,5,6,9\}$　　D. $\{1,3,5,6,9\}$

·解析· 集合 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,6,9\}$，所以 $A\cap B=\{3\}$，故选 B.

考点精讲

一、集合之间的关系

1. 子集

一般地，对于两个集合 A、B，如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 就叫作集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或者 $B\supseteq A$，读作“A 包含于 B”，或“B 包含 A”.

当集合 A 不包含于集合 B，或集合 B 不包含集合 A 时，记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$.

性质：(1)任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$.

(2)空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$.

(3)对集合A,B,C,若$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$.

(4)含有n个元素的集合,有2^n个子集.

2. 真子集

如果集合B是集合A的子集,并且集合A中至少有一个元素不属于集合B,那么把集合B叫作集合A的**真子集**. 记作$A\supsetneqq B$(或$B\subsetneqq A$),读作"A真包含B"(或"B真包含于A").

性质:(1)空集是任何非空集合的真子集.

(2)对于集合A,B,C,若$A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则$A\subsetneqq C$.

(3)含有n个元素的集合,有2^n-1个真子集.

3. 集合相等

一般地,对于两个集合A与B,如果集合A中的任何一个元素都是集合B的元素,同时集合B中的任何一个元素都是集合A的元素,我们就说集合A等于集合B,记作$A=B$(集合A,B的所有元素都相等).

二、集合的运算

1. 交集

一般地,由既属于集合A又属于集合B的所有元素组成的集合,称为集合A与集合B的交集,记作$A\cap B$,即$A\cap B=\{x\mid x\in A 且 x\in B\}$.

性质:

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2)$A\cap A=A$.

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4)$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$.

(5)若$A\subseteq B$,则$A\cap B=A$.

2. 并集

一般地,由所有属于集合A或属于集合B的所有元素组成的集合,称为集合A与集合B的并集,记作$A\cup B$,即$A\cup B=\{x\mid x\in A 或 x\in B\}$.

性质:

(1)$A\cup B=B\cup A$.

(2)$A\cup A=A$.

(3)$A\cup\varnothing=A$.

(4)$A\subseteq A\cup B$,$B\subseteq A\cup B$.

(5)若$A\subseteq B$,则$A\cup B=B$.

3. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,则称这个集合为全集. 通常用U表示.

注意 全集是一个相对的概念，在不同的情况下全集的概念也不同.

4. 补集

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

性质：

(1) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2) $\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

(3) $A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

例题分析

一 集合的关系

例 1 下列说法正确的有(　　)个.

①空集没有子集.

②任何集合至少有两个子集.

③空集是任何集合的真子集.

④若 $\varnothing\subsetneqq A$，则 $A\neq\varnothing$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解 由空集的性质可知，①②③是错误的，④是正确的，故选 A.

考点分析 考查子集和真子集的性质，注意空集的概念.

强化训练 1

下列命题中正确的是(　　).

A. $\varnothing\subsetneqq\{0\}$　　B. $0\in\varnothing$

C. $\varnothing=\{0\}$　　D. $\varnothing\in\{0\}$

解 $\varnothing$是不含任何元素的集合，$\{0\}$是只有一个元素 0 的集合. 所以选 A.

例 2 若集合 $A=\{x\mid x<0\}$，集合 $B=\{x\mid x<1\}$，则集合 A 与集合 B 的关系是(　　).

A. $A=B$　　B. $A\subseteq B$　　C. $B\subseteq A$　　D. $B\in A$

解 在同一个数轴上做出两个集合的数轴表示，由定义知集合 A 是集合 B 的子集，故选 B.

考点分析 考查集合之间的关系.

强化训练 2

若集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，$P=A$，则集合 B 与 P 的关系是(　　).

A. $B=P$　　B. $B\subsetneqq P$

C. $P\subsetneqq B$　　D. $P\in B$

解　因为 $x\subseteq A$，所以 $B=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，故选 C.

例 3　若集合 $A=\{a,b,c\}$，试写出集合 A 的所有子集和真子集.

解　集合中含有 3 个元素，所以集合 A 的所有子集为 $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$.

除集合 $\{a,b,c\}$ 外，其他子集都是集合 A 的真子集.

考点分析　含有 n 个元素的有限集合，共有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集.

强化训练 3

已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2<4,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$，则 A 中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 8

C. 5　　D. 4

解　由 $x^2+y^2<4$，知 $-2<x<2$，$-2<y<2$. 又 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，所以 $x\in\{-1,0,1\}$，$y\in\{-1,0,1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9. 故选 A.

例 4　已知集合 $A=\{x|x^2+5x-6=0\}$，$B=\{x|ax+1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值的集合.

解　由题意得 $A=\{x|x^2+5x-6=0\}=\{1,-6\}$，因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{1\}$ 或 $B=\{-6\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，$a=0$. 符合题意.

当 $B=\{1\}$ 时，$1\times a+1=0$，解得 $a=-1$.

当 $B=\{-6\}$ 时，$(-6)\times a+1=0$，解得 $a=\dfrac{1}{6}$.

综上，实数 a 的取值的集合为 $\left\{0,-1,\dfrac{1}{6}\right\}$.

考点分析　两个集合包含或相等关系的问题，通过建立方程(组)，然后解出未知数，最后利用集合元素的特征进行检验即可.

强化训练 4

已知集合 $A=\{1,1+x,1+2x\}$，$B=\{1,y,y^2\}$，若 $A=B$，求 x,y 的值.

解 因为 $A=B$，

所以 $\begin{cases}1+x=y\\1+2x=y^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+x=y^2\\1+2x=y\end{cases}$.

解得 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{4}\\y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

当 $x=0,y=1$ 时，集合元素不满足互异性，应舍去. 所以 $x=-\dfrac{3}{4}$，$y=-\dfrac{1}{2}$.

二　集合的运算

例 5　(1)设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cap B$.

(2)设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

解　(1)$B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}$，

$\complement_U A\cap B=\{x\mid -1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

(2)$A\cap B=\{2,3\}$，$A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，

$\complement_U A=\{4\}$，$\complement_U B=\{0,1\}$，所以 $\complement_U A\cup\complement_U B=\{0,1,4\}$.

考点分析　考查对集合运算的理解及性质的运用. 在进行集合的运算时，可以采用 Venn 图或数轴表示两个集合的交集、并集.

强化训练 5

设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x \mid |x|=y+1, y\in A\}$，求 $\complement_U B$.

解　因为 $A=\{x \mid x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$，$y\in A$，所以当 $y=-1$ 时，$x=0$；当 $y=2$ 时，$x=\pm 3$，所以 $B=\{-3,0,3\}$.

所以 $\complement_U B=\{x \mid x\neq -3$ 且 $x\neq 0$ 且 $x\neq 3\}$.

例 6　已知集合 $M=\{x \mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x \mid x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 取值范围.

解　要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 5\}$. 即

$\begin{cases} a+3\leqslant 5, \\ a\geqslant -1, \end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$，所以实数 a 的取值范围为 $\{a \mid -1\leqslant a\leqslant 2\}$.

考点分析　解题时利用数轴表示集合，便于寻求满足条件的实数 a. 特别需要注意的是“端点值”的问题，是能取等号还是不能取等号.

强化训练 6

已知 $A=\{x \mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x \mid |x+4|>a\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解 由题意得集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}=\{x\mid -2<x<3\}$，

集合 B 中，$|x+4|>a$ 可分三种情况进行讨论.

(1)当 $a<0$ 时，$B=\mathbf{R}$，不符合题意.

(2)当 $a=0$ 时，$B=\{x\mid |x+4|>0\}=\{x\mid x\neq -4\}$，不符合题意.

(3)当 $a>0$ 时，$B=\{x\mid |x+4|>a\}=\{x\mid x<-a-4$ 或 $x>a-4\}$.

因为 $A\cap B=\varnothing$，

所以 $\begin{cases}-a-4\leqslant -2,\\ a-4\geqslant 3,\end{cases}$

解得 $a\geqslant 7$.

综上，实数 a 的取值的集合为 $[7,+\infty)$.

专项检测

一、选择题

1. 设集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1\}$

3. 设集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{b\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{a,b,c\}$

4. 设集合 $A=\{-2,2\}$，$B=\{-1,2\}$. 则 $A\cup B=$(　　).

A. $\{2\}$　　B. $\{-2,-1\}$　　C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,-1,2\}$

5. 设集合 $A=\{x\mid -4<x<1\}$，集合 $B=\{x\mid x\leqslant -4\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{x\mid x\leqslant -4\}$

C. $\{x\mid x<1\}$　　D. $\{-4<x<1\}$

6. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-6x+5<0\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{2,3,4,5\}$

7. 设全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合 $A=\{1,3,4,5\}$，$B=\{3,5,7,8\}$，则 $\complement_U(A\cap B)=$(　　).

A. $\{1,3,4,5\}$　　B. $\{3,5,7,8\}$

C. $\{0,1,2,4,6,7,8,9\}$　　D. $\varnothing$

8. 设 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$　　B. $\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$　　D. $\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$

9. 集合 $\{1,2,3\}$ 所有非空真子集的个数是(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

10. 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x<2\}$,则 $\complement_U A=$(　　).

A. $\{x\mid x\leqslant -3$ 或 $x>2\}$　　B. $\{x\mid x<-3$ 或 $x\geqslant 2\}$

C. $\mathbf{R}$　　D. $\varnothing$

二、填空题

11. 用符号"$\subseteq$"或"$\supseteq$"填空:

(1) $\{a,b,c,d\}$________$\{a,b\}$;　　(2) $\varnothing$________$\{1,2,3\}$;

(3) $\mathbf{N}$ ________ $\mathbf{Q}$;　　(4) $\{x\mid 3<x<5\}$________$\{x\mid 0\leqslant x<6\}$.

12. 选用适当的符号"$\subsetneqq$"或"$\supsetneqq$"填空:

(1)$\{1,3,5\}$________$\{1,2,3,4,5\}$;

(2)$\{2\}$________$\{x\mid\ |x|=2\}$;

(3)$\{1\}$________$\varnothing$.

13. 已知集合 A,B,求 $A\cap B$.

(1)$A=\{1,2\},B=\{2,3\}$;$A\cap B=$________;

(2)$A=\{a,b\},B=\{c,d,e,f\}$;$A\cap B=$________;

(3)$A=\{1,3,5\},B=\varnothing$;$A\cap B=$________;

(4) $A=\{2,4\},B=\{1,2,3,4\}$. $A\cap B=$________.

14. 已知集合 A,B,求 $A\cup B$.

(1)$A=\{1,2\},B=\{2,3\}$;$A\cup B=$________;

(2)$A=\{a,b\},B=\{c,d,e,f\}$;$A\cup B=$________;

(3)$A=\{1,3,5\},B=\varnothing$;$A\cup B=$________;

(4) $A=\{2,4\},B=\{1,2,3,4\}$. $A\cup B=$________.

15. 设 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},A=\{1,3,4,5\},B=\{3,5,7,8\}$. 求 $\complement_U(A\cup B)=$________.

三、判断题

16. 集合 $A=\{x\mid |x|=2\}$与集合 $B=\{x\mid x^2-4=0\}$相等.　　(　　)

17. $\{2\}\subsetneqq\{x\mid |x|=2\}$.　　(　　)

18. 集合 $A=\{0\}$,则 $A\cup\varnothing=\varnothing$.　　(　　)

四、解答题

19. 设集合 $M=\{0,1,2\}$,试写出 M 的所有子集,并指出其中的真子集.

20. 已知集合$\{1,a,0\}$与$\{-1,b,1\}$是同一集合，求实数a,b的值.

21. 已知集合$A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，若$B\subseteq A$，求实数p的取值范围.

第三节　充要条件

考点精讲

一、命题

1. 命题的定义

可以判断真假的陈述句叫作命题.

若句子为真，是真命题；句子为假，是假命题.

2. 命题的常见形式

若p则q. p叫命题的条件，q叫命题的结论.

二、充要条件的定义

1. 充分条件

如果能由条件p成立推出结论q成立，则说条件p是结论q的充分条件，记作$p\Rightarrow q$.

2. 必要条件

如果能由结论 q 成立能推出条件 p 成立，则说条件 p 是结论 q 的必要条件，记作 $p \Leftarrow q$.

3. 充分且必要条件(充要条件)

如果 $p \Rightarrow q$，并且 $p \Leftarrow q$，那么 p 是 q 的充分且必要条件，简称充要条件，记作“$p \Leftrightarrow q$”.

三、充要条件的判断方法

1. 定义法(从逻辑关系上判断)

(1)若 $p \Rightarrow q$ 但 $q \nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件；

(2)若 $p \nRightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件；

(3)若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分且必要条件(充要条件)；

(4)若 $p \nRightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$，则 p 是 q 的不充分也不必要条件.

2. 集合法(从命题对应的集合与集合之间的关系上判断)

$A=\{x \mid P(x)\}$，$B=\{x \mid Q(x)\}A \subseteq B \Leftrightarrow P(x) \Rightarrow Q(x)$.

例题分析

充要条件

例 1　指出下列条件和结论中，条件 p 与结论 q 的关系.

$p: x=y$，$q: |x|=|y|$

解　相等的两个数的绝对值肯定相等，即由条件 $x=y$ 成立，能够推出结论 $|x|=|y|$ 成立；而绝对值相等的两个数不一定相等，如 -1 和 1. 即由结论 $|x|=|y|$ 成立，不能推出 $x=y$ 成立. 因此 p 是 q 的充分条件，但 p 不是 q 的必要条件.

由此可以看到，由“p 是 q 的充分条件”并不一定能够得到“p 是 q 的必要条件”的结论，同样由“p 是 q 的必要条件”也不一定能够得到“p 是 q 的充分条件”的结论.

强化训练 1

指出下列条件和结论中，条件 p 与结论 q 的关系.

$p: x<2$，$q: x<0$.

解 小于 2 的数不一定是负数,因此由条件 $x<2$ 成立不能推出结论 $x<0$ 成立;负数肯定小于 2,所以由结论 $x<0$ 成立能推出条件 $x<2$ 成立. 因此 p 不是 q 的充分条件,但 p 是 q 的必要条件.

例 2 指出下列各组结论中,p 与 q 的关系.

(1) p:$x>3$,q:$x>5$;

(2) p:$x-2=0$,q:$(x-2)(x+5)=0$;

解 (1)由条件 $x>3$ 成立,不能推出结论 $x>5$ 成立,如 $x=4$ 时,$4>3$,但是 $4<5$;而由 $x>5$ 成立能够推出 $x>3$ 成立. 因此 p 是 q 的必要条件,但 p 不是 q 的充分条件.

(2)由条件 $x-2=0$ 成立,能够推出结论$(x-2)(x+5)=0$ 成立;由结论$(x-2)(x+5)=0$ 成立不能推出条件 $x-2=0$ 成立,如 $x=-5$ 时,$(x-2)(x+5)=0$ 也成立. 因此 p 是 q 的充分条件,但 p 不是 q 的必要条件.

强化训练 2

指出下列结论中,p 与 q 的关系.

p:$-6x>3$,q:$x<-\frac{1}{2}$.

解 由条件 $-6x>3$ 成立,能够推出结论 $x<-\frac{1}{2}$ 成立,并且由结论 $x<-\frac{1}{2}$ 成立也能够推出条件 $-6x>3$ 成立. 因此 p 是 q 的充要条件.

例 3 “$x>3$”是“$x>9$”的( ).

A. 充分条件　　B. 充要条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 必要条件

解 任何一个大于 3 的数不一定大于 9,所以是不充分条件,任何一个大于 9 的数一定大于 3,所以是必要条件. 故正确选项为 D.

强化训练 3

“$x>6$”是“$|x|>6$”的( ).

A. 充分条件　　B. 充要条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 必要条件

解 $|x|>6$ 的解集为 $x>6$ 或 $x<-6$,利用小范围推大范围可以知道 $x>6$ 能够推出 $|x|>6$ 的成立,所以 $x>6$ 是 $|x|>6$ 的充分条件. 故正确选项为 A.

专项检测

一、选择题

1. “$x=1$”是“$x^2-1=0$”的(　　).

A. 充分条件　　B. 充要条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 必要条件

2. “$(x-3)(x-1)=0$”是“$x=1$”的(　　).

A. 充分条件　　B. 充要条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 必要条件

3. “$x<2$”是“$2x-4<0$”的(　　).

A. 充分条件　　B. 充要条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 必要条件

4. “$A\cup B=B$”是“$A\subsetneqq B$”的(　　).

A. 充分条件　　B. 充要条件

C. 既不充分也不必要条件　　D. 必要条件

5. “$a+3$ 是无理数”是“a 是无理数”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

6. “$a=3$ 且 $b=5$”的________条件是“$(a-3)^2+|b-5|=0$”.

7. 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要非充分条件,则甲是丁的________.

8. “x 是有理数”是“x 是实数”的________条件.

三、判断题

9. $a=0$ 是 $ab=0$ 的充要条件.　　(　　)

10. $a=b$ 是 $a-b=0$ 的充要条件.　　(　　)

四、解答题

11. 确定下列各题中,p 是 q 的什么条件?

(1) p:$(x-2)(x+1)=0$,q:$x-2=0$;

(2) p:内错角相等,q:两直线平行;

(3) p:$x=1$,q:$x^2=1$;

(4) p:四边形的对角线相等,q:四边形是平行四边形.